

1.3 Équations matricielles

Nous entrons maintenant dans le cœur de l'algèbre linéaire : la multiplication de matrices par vecteurs, et les liens avec la résolution de systèmes linéaires. Le but est d'élever le niveau d'abstraction d'un cran, pour avoir une compréhension plus profonde de la résolution de systèmes d'équations linéaires.

1.3.1 Produit matrice-vecteur

Revenons au principe de matrice des coefficients d'un système. Soit le système

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$$

Il peut être écrit comme une égalité vectorielle :

$$\begin{bmatrix} 3x - 2y + 5z \\ 2x + 2y - 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, la matrice des coefficients du système est :

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

L'idée va être de considérer les trois inconnues x, y, z comme trois composantes d'un vecteur inconnu $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Le système se réécrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Cette notation fait écho à la matrice augmentée du système : c'est une autre manière d'écrire le système, qui ne laisse aucune ambiguïté. Si à l'inverse, on a :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix}$$

alors il n'y a pas de doute possible, cela correspond au système dont la matrice de coefficients est

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

(trois lignes, donc trois équations), donc les inconnues sont x, y, z, t et dont le second membre est $\begin{bmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix}$, autrement dit :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 13 \\ 5x + 6y + 7z + 8t = 14 \\ 9x + 10y + 11z + 12t = 15 \end{cases}$$

Cela peut aussi s'écrire comme une équation vectorielle :

$$\begin{bmatrix} x + 2y + 3z + 4t \\ 5x + 6y + 7z + 8t \\ 9x + 10y + 11z + 12t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Remarquons que l'on a écrit d'une part :

$$\begin{bmatrix} 3x - 2y + 5z \\ 2x + 2y - 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ et d'autre part : } \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} x + 2y + 3z + 4t \\ 5x + 6y + 7z + 8t \\ 9x + 10y + 11z + 12t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Cela motive la définition du produit matrice-vecteur suivante.

Définition 1.1.3.41

Produit matrice-vecteur

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ une matrice de taille $m \times n$, et $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, alors le

produit de A et \vec{x} est

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Remarque importante 1.1.3.42

Attention ! Il est nécessaire qu'il y ait autant de colonnes dans la matrice que de lignes dans le vecteur, pour que ce produit soit possible. Le nombre de lignes de la matrice correspond alors au nombre de lignes dans le résultat, qui est donc un vecteur de \mathbb{R}^m

Remarque 1.1.3.43. $A\vec{x}$ peut être vu comme une combinaison linéaire des colonnes de A (qui sont des vecteurs de \mathbb{R}^m), avec les scalaires x_i :

$$A\vec{x} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n$$

où les \vec{a}_i sont les colonnes de A .

Exemples. 1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 7 + 2 \times 8 + 3 \times 9 \\ 4 \times 7 + 5 \times 8 + 6 \times 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 122 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 19 \\ -14 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} = 36$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 8 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 38 \\ 7 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ est impossible.

Théorème 1.1.3.44

Linéarité du produit matrice-vecteur

Soit A une matrice à m lignes et n colonnes, \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs de \mathbb{R}^n , et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors les égalités suivantes :

1. $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$
2. $A(\lambda\vec{u}) = \lambda A\vec{u}$

Démonstration. La démonstration s'écrit de manière simple en utilisant la remarque 1.1.3.43.

$$\begin{aligned} 1. \quad A(\vec{u} + \vec{v}) &= (u_1 + v_1)\vec{a}_1 + \cdots + (u_n + v_n)\vec{a}_n = (u_1\vec{a}_1 + \cdots + u_n\vec{a}_n) + (v_1\vec{a}_1 + \cdots + v_n\vec{a}_n) \\ &= A\vec{u} + A\vec{v}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad A(\lambda\vec{u}) &= \lambda A\vec{u} = (\lambda u_1)\vec{a}_1 + \cdots + (\lambda u_n)\vec{a}_n \\ &= \lambda(u_1\vec{a}_1) + \cdots + \lambda(u_n\vec{a}_n) \\ &= \lambda A\vec{u} \end{aligned}$$

□

Définition 1.1.3.45*Équation matricielle*

Soit A une matrice de taille $m \times n$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, alors l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est appelée équation matricielle.

Théorème 1.1.3.46

Soit A une matrice à m lignes et n colonnes notées $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, alors les trois équations suivantes possèdent le même ensemble de solutions :

- l'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$
- l'équation vectorielle $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$
- le système d'équations linéaires dont la matrice augmentée est $\begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n & \vec{b} \end{bmatrix}$

1.3.2 Existence de solution et nombre de solutions**Théorème 1.1.3.47**

L'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une solution si et seulement si \vec{b} est une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A .

Démonstration. On a les équivalences suivantes :

l'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une solution notée $\vec{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow A\vec{s} = \vec{b} \text{ par définition de } \vec{s} \text{ étant une solution de } A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow s_1\vec{a}_1 + s_2\vec{a}_2 + \dots + s_n\vec{a}_n = \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \vec{b} \text{ est une combinaison linéaire des colonnes de } A \quad \square$$

Théorème 1.1.3.48

Soit A une matrice à m lignes et n colonnes notées $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, alors les affirmations suivantes sont équivalentes.

1. L'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$
2. Tout vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des colonnes de A
3. Les colonnes de A engendrent \mathbb{R}^m
4. La matrice échelonnée réduite associée à A possède un pivot par ligne.

Démonstration. L'équivalence entre 1 et 2 est donnée par le théorème précédent. L'équivalence entre 2 et 3 correspond à la définition de $\text{Vect}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.

Montrons maintenant que 1 et 4 sont équivalentes. On a l'équivalence des matrices : $[A|\vec{b}] \sim [R|\vec{d}]$.

Supposons que 4 est vraie. Alors chaque ligne de R a un pivot, et cela implique que le système $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une solution.

Si 4 est fausse, alors la dernière ligne (au moins) de R est nulle, ce qui implique que le système $R\vec{x} = \vec{d}$ n'a pas de solution pour tout \vec{d} dont la dernière composante est non nulle. Donc 1 est fausse dans ce cas. \square

Remarque 1.1.3.49. A n'a pas forcément un pivot par colonne.

Exemples. 1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. x_3 est une variable libre (car la troisième colonne de A n'est pas une variable pivot). On pose $x_3 = t$ et on a

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - t \\ x_2 = b_2 - t \\ x_3 = t \end{cases}$$

Vérifions que les affirmations du théorème ?? sont soit toutes vraies, soit toutes fausses.

1 est vrai, car quel que soit $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, on a une infinité de solutions de la forme $\vec{s} =$

$$\begin{bmatrix} b_1 - t \\ b_2 - t \\ t \end{bmatrix}.$$

2 est vrai, puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\vec{b} = (b_1 - t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (b_2 - t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3 est vrai, car $\text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^2$ et 2 implique que $\mathbb{R}^2 \subset \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

4 est vrai, car A est échelonnée réduite.

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$. Vérifions que les affirmations du théorème ?? sont soit toutes

vraies, soit toutes fausses.

1 est fausse, car si $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, alors la matrice augmentée du système est $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

et ce système n'a pas de solution.

2 est fausse. En effet, reprenons $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, alors trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} +$

$\lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ revient à résoudre le système inconsistant du point 1.

3 est fausse, car il n'est pas possible d'exprimer $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ comme combinaison linéaire des

colonnes de A . Donc $\text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3$ et cette inclusion est stricte.

4 est fausse, car A est échelonnée réduite.

Corollaire 1.1.3.50

Si un ensemble de vecteurs $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ engendre \mathbb{R}^m , alors $n \geq m$.

Démonstration. En effet, la matrice échelonnée réduite de la matrice A constituée des n vecteurs colonnes a un pivot par ligne. Elle doit donc avoir au moins autant de colonnes que de lignes. \square

1.3.3 Systèmes d'équations linéaires homogènes

Rappel. Un système d'équations est dit homogène, si son second membre est nul.

Remarque 1.1.3.51. Un système d'équations homogène est consistant, parce que $\vec{x} = \vec{0}$ est solution du système. On appelle cette solution, la solution triviale.

Nous allons nous intéresser aux solutions non triviales d'un système d'équations homogènes. Cela constitue non seulement une famille de systèmes simples, mais aussi un cas structurant pour tout type de système.

Exemples. 1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ a pour unique solution $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$.

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ a une infinité de solutions. x_3 est une variable libre, et si l'on

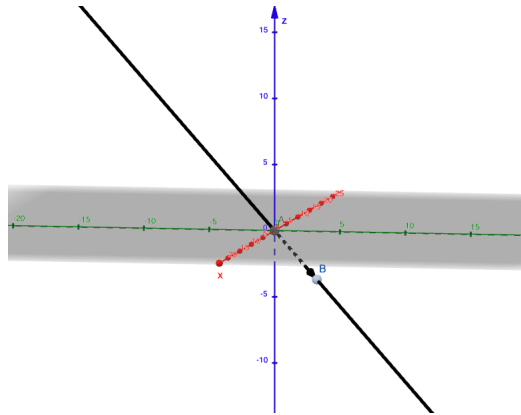
note $x_3 = t$, le système a l'ensemble de solutions suivantes : $\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} -2t \\ \frac{-4}{3}t \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$.

Remarquons que si $t = 0$, alors la solution est triviale. Ces solutions sont toutes sur une même droite passant par l'origine, la droite engendrée par exemple par $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ (obtenu avec

$t = -3$). On peut donc aussi noter $\mathcal{S} = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right)$.

En choisissant une autre valeur de t , on aurait un autre vecteur générateur de l'ensemble de solutions, mais le même ensemble. Prenons par exemple $t = 1$, alors on a aussi $\mathcal{S} = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -2 \\ \frac{-4}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

Il est important de se convaincre que $\text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -2 \\ \frac{-4}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.



Remarque importante 1.1.3.52

Remarquons bien que l'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{0}$ peut avoir une infinité de solutions. Ce n'est pas le cas de l'équation $ax = 0$ dans \mathbb{R} si $a \neq 0$.

Rappel. On a vu qu'un système d'équations linéaires était forcément dans l'une des situations suivantes :

1. Il n'admet pas de solution.
2. Il admet exactement une solution.
3. Il admet une infinité de solutions.

Donc un système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ est nécessairement dans l'une de ces deux situations :

1. Il n'admet que la solution triviale. Dans ce cas, la forme échelonnée réduite de A possède un pivot par colonne.
2. Il admet une infinité de solutions. Dans ce cas, la forme échelonnée réduite de A a une ou plusieurs colonnes sans pivot.

1.3.4 Système d'équations non homogène

Nous allons voir dans cette section, que l'ensemble des solutions d'un système de la forme $A\vec{x} = \vec{b}$ est lié à l'ensemble des solutions du système homogène associé $A\vec{x} = 0$.

Théorème 1.1.3.53

Solutions d'un système $A\vec{x} = \vec{b}$

Soit A une matrice à m lignes et n colonnes, et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Notons \mathcal{S}_h l'ensemble des solutions de $A\vec{x} = 0$. Supposons que le système $A\vec{x} = \vec{b}$ est consistant. Soit \vec{s}_p une solution particulière de $A\vec{x} = \vec{b}$ (c'est-à-dire $A\vec{s}_p = \vec{b}$).

Alors l'ensemble des solutions \mathcal{S} de $A\vec{x} = \vec{b}$ est

$$\mathcal{S} = \{\vec{s}_p + \vec{s}_h, \vec{s}_h \in \mathcal{S}_h\}$$

Autrement dit, toute solution du système est obtenue en additionnant une solution particulière et une solution du système homogène associé.

Démonstration. Nous allons voir que

1. Si $\vec{s}_h \in \mathcal{S}_h$ alors $\vec{s}_p + \vec{s}_h \in \mathcal{S}$
2. Si $\vec{s} \in \mathcal{S}$, alors il existe $\vec{s}_h \in \mathcal{S}_h$ tel que $\vec{s} = \vec{s}_p + \vec{s}_h$.
 1. $A(\vec{s}_p + \vec{s}_h) = A\vec{s}_p + A\vec{s}_h = \vec{b} + \vec{0}$
 2. Soit $\vec{s} \in \mathcal{S}$, alors on a $A\vec{s} = \vec{b}$ et $A\vec{s}_p = \vec{b}$. Donc $A\vec{s} - A\vec{s}_p = 0$. Or $A\vec{s} - A\vec{s}_p = A(\vec{s} - \vec{s}_p)$. Donc $\vec{s} - \vec{s}_p \in \mathcal{S}_h$ et $\vec{s} = \vec{s}_p + (\vec{s} - \vec{s}_p)$.

□

Méthode 1.1.3.54*Résolution d'un système $A\vec{x} = \vec{b}$*

Pour résoudre un système $A\vec{x} = \vec{b}$, on peut donc suivre la méthode suivante :

1. Trouver une solution particulière \vec{s}_p .
2. Résoudre le système homogène associé $A\vec{x} = 0$.
3. Conclure que toute solution de $A\vec{x} = \vec{b}$ s'écrit à partir des étapes 1 et 2.

Cela est utile s'il y a une solution particulière connue par ailleurs ou évidente.

Exemples. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Résolvons $A\vec{x} = \vec{b}$

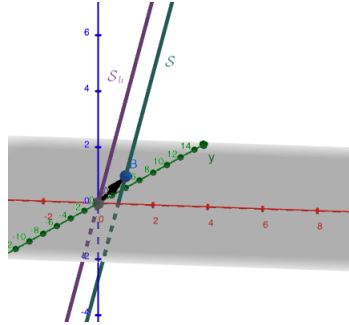
1. Le vecteur $\vec{s}_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est solution du système.
2. Résolvons le système $A\vec{x} = 0$ en cherchant la réduite de Gauss de A . Après calcul, on obtient $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, donc $\vec{0}$ est l'unique solution du système homogène associé.
3. Donc il n'y a qu'une solution à $A\vec{x} = \vec{b}$, $\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. Résolvons $A\vec{x} = \vec{b}$.

1. Remarquons que $\vec{s}_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ est solution du système.
2. Résolvons $A\vec{x} = 0$. Pour cela, cherchons la réduite de Gauss de A . Après calcul, on obtient $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{13} \\ 0 & 1 & \frac{7}{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. On a donc x_3 qui est une variable libre, notons $x_3 = t$, et $\mathcal{S}_h = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{5t}{13} \\ \frac{-7t}{13} \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 13 \end{bmatrix} \right)$.
3. On a donc $\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 13 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$

Remarque 1.1.3.55. Graphiquement, cela signifie que l'ensemble des solutions d'un système de la forme $A\vec{x} = \vec{b}$, est un translaté de l'ensemble des solutions de $A\vec{x} = 0$. Le vecteur de

translation est \vec{s}_p .



Théorème 2.23*Caractérisation des matrices inversibles*

Soit $A = [\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n]$ une matrice carrée de taille n . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. A est inversible
2. $A \sim \mathbb{I}_n$
3. La matrice échelonnée réduite de A a n pivots (un par ligne, un par colonne).
4. L'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ possède $\vec{x} = \vec{0}$ comme unique solution.
5. Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.
6. L'application linéaire $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est injective.
7. L'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ admet exactement une solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.
8. $\text{Vect}(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) = \mathbb{R}^n$.
9. L'application linéaire $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est surjective.
10. Il existe une matrice carrée C telle que $CA = \mathbb{I}_n$ (inverse à gauche).
11. Il existe une matrice carrée D telle que $AD = \mathbb{I}_n$ (inverse à droite).
12. A^T est inversible.
13. La matrice échelonnée réduite de A est \mathbb{I}_n .
14. A est un produit de matrices élémentaires.

Définition 2.24

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. On dit que A est singulière si A n'est pas inversible.

Remarque 2.2.0.25. Une matrice carrée est soit inversible, soit singulière. Si une matrice n'est pas carrée, la question de l'inversibilité n'a pas de sens.